CONCOURS INTERNE
et
CONCOURS D'ACCÈS À L'ÉCHELLE DE RÉMUNÉRATION DES PROFESSEURS CERTIFIÉS

SESSION DE 1988

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Matériel à fournir : feuilles de papier quadrillé 5 × 5.

L'objet du problème est l'étude de polynômes qui approchent la fonction cosinus sur un intervalle d'amplitude un quart de période. La périodicité de la fonction cosinus conduit naturellement à introduire des fonctions périodiques construites à partir de polynômes. Le problème présente un triple aspect : approximation de la fonction cosinus, suite de polynômes, fonctions périodiques. Il est divisé en cinq séquences ; les objectifs en sont précisés en tête de chacune d'elles. La séquence 2 n'intervient pas dans les séquences suivantes.

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels ; $|x|$ désigne la valeur absolue du réel x. Pour une fonction h, les symboles h', h'', h''' désignent les dérivées première, seconde, troisième de h. Une fonction w est dite 2-périodique si elle est définie sur $\mathbb{R}$ et si elle vérifie $w(x+2) = w(x)$ pour tout réel x ; en particulier la fonction $x \mapsto \cos \pi x$ est 2-périodique.

1. Un encadrement de la fonction cosinus

Dans cette séquence, directement liée à des activités possibles en classe, un sujet d'étude est proposé et des démarches sont décrites. Il est demandé :

1.1. *une solution*, c'est-à-dire une justification claire (raisonnements, calculs, figures) de tous les points intermédiaires et des résultats indiqués ;

1.2. ensuite *un bref commentaire* à caractère didactique, comparant les méthodes décrites quant à leur intérêt et leur portée dans un travail en classe (consolidation de connaissances, acquisition de savoir-faire, mise en jeu de notions nouvelles).

L'objectif mathématique est d'établir l'encadrement

$$1 - 6x^2 + 4x^3 \leqslant \cos \pi x \leqslant 1 - 4x^2 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

et d'évaluer la qualité de cet encadrement.

Pour établir l'encadrement on propose les deux méthodes suivantes :

PREMIÈRE MÉTHODE

La résolution graphique dans l'intervalle $[0, 1]$ de l'inéquation $\sin \frac{\pi x}{2} \geqslant \sqrt{2}\, x$ conduit à la majoration de $\cos \pi x$.

La minoration de $\cos \pi x$ équivaut, en posant d'abord $X = \frac{1}{2} - x$, à $\sin \pi X \geqslant 3X - 4X^3$ pour $0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}$.

On pose ensuite $X = \sin t$, où t décrit l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$; on observe que, pour ces valeurs de t, on a

$$\pi \sin t \geqslant 3t \qquad \text{et} \qquad \sin(\pi \sin t) \geqslant \sin 3t.$$

On conclut en utilisant la relation $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$.

DEUXIÈME MÉTHODE

On pose $y(x) = 1 - 4x^2 - \cos \pi x$ et $z(x) = 1 - 6x^2 + 4x^3 - \cos \pi x$. On étudie sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ les variations de y'', puis de y' ainsi que les variations de z''', puis de z'', puis de z' ; on en déduit le signe de y et le signe de z.

Tournez la page S.V.P.

Pour évaluer la qualité de l'encadrement on étudie la fonction $y - z$ et on représente sur un même graphique, à une échelle appropriée, les fonctions $y - z$, y et z, en plaçant notamment les tangentes aux points d'abscisse $0, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

Pour la suite on note Q le polynôme $Q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$ qui intervient explicitement dans les séquences 2 et 3.

2. Étude et caractérisation d'une fonction 2-périodique

Les propriétés de la fonction cosinus et les résultats de la séquence 1 suggèrent de construire à partir de polynômes des fonctions paires et 2-périodiques.

On considère dans cette séquence la fonction g, associée à Q, définie par les conditions :

g est paire, 2-périodique et on a $g(x) = Q(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2.1. *a.* Établir successivement qu'on a, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $g(x) + g(1 - x) = 0$, $g(x) + g(x + 1) = 0$,

et $g(x + j) = (-1)^j g(x)$ pour j élément de $\mathbb{Z}$.

Montrer que le point $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est centre de symétrie de la représentation graphique de g.

Indiquer comment on obtient la représentation graphique de g à partir de la courbe donnant la représentation graphique de Q sur l'intervalle [0, 1].

b. Montrer que g a une dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$.

Les deux questions suivantes conduisent à deux caractérisations de la fonction g.

2.2. *a.* On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions s données par :

$$s(x) = \alpha x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu \quad \text{pour} \quad -1 \leqslant x < 0$$
$$\text{et } s(x) = \beta x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

où $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ et ν sont des coefficients réels.

Montrer que toute fonction de $\mathcal{S}$ a une dérivée seconde continue sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Trouver l'expression générale des fonctions s satisfaisant en outre à

$$s(1) = s(-1), \quad s'(1) = s'(-1), \quad s''(1) = s''(-1).$$

On vérifiera que l'ensemble de ces fonctions est un espace vectoriel de dimension 2.

b. Décrire explicitement l'ensemble des fonctions réelles 2-périodiques ayant une dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$ et dont la restriction à chaque intervalle $]j, j + 1[$ (j élément de $\mathbb{Z}$) est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Montrer que g est l'unique telle fonction prenant la même valeur que $\cos \pi x$ pour tout x dans $\mathbb{Z}$.

2.3. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions réelles 2-périodiques ayant une dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$ et prenant la même valeur que $\cos \pi x$ pour tout x dans $\mathbb{Z}$.

a. Établir qu'on a : $\displaystyle\int_{-1}^{1} f''(x)\,dx = 0$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, f''(x)\,dx = -4$ pour tout élément f de $\mathcal{F}$.

b. On pose $H(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} [f''(x)]^2\,dx$, pour f élément de $\mathcal{F}$. Calculer $H(f)$ lorsque $f(x) = \cos \pi x$.

La fonction g appartient aussi à $\mathcal{F}$. Calculer $H(g)$.

c. Soit f un élément de $\mathcal{F}$. À l'aide de l'égalité $g''(x) = 24|x| - 12$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$, calculer :

$\displaystyle\int_{-1}^{1} g''(x)[f''(x) - g''(x)]\,dx$, en déduire qu'on a $H(f) = H(g) + H(f - g)$.

d. Montrer que g est l'unique élément de $\mathcal{F}$ rendant minimum la quantité $H(f)$ lorsque f décrit $\mathcal{F}$.

Tournez la page S.V.P.

3. Une suite de polynômes

3.1. Au polynôme Q défini à la séquence 1, on associe les trois polynômes P_1, P_2, P_3 définis par :

$$P_1(x) = \frac{1}{24} Q''(x), \qquad P_2(x) = \frac{1}{24} Q'(x), \qquad P_3(x) = \frac{1}{24} Q(x).$$

Pour $n = 1, 2, 3$, montrer qu'on a $P_n(x) + (-1)^n P_n(-x) = 2\frac{x^n}{n!}$ et exprimer $P_n(1-x)$ en fonction de $P_n(x)$.

3.2. On envisage plus généralement une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes vérifiant pour tout n,

$$P_n(x) + (-1)^n P_n(-x) = 2\frac{x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad P_n(x) = (-1)^n P_n(1-x).$$

a. Que vaut, pour une telle suite, $P_n(x) + P_n(x+1)$?

b. Montrer que, pour chaque n, il existe au plus un polynôme P_n vérifiant les conditions ci-dessus.

c. On admet provisoirement (cf. 4.3.*b.*) l'existence de la suite (P_n).
Exprimer P_n' en fonction de P_{n-1} $(n \geqslant 2)$ et calculer la dérivée n-ième de P_n. Utilisant la relation liant $P_n(x+1)$ et $P_n(x)$ et la formule de Taylor, montrer qu'on a :

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\left[\frac{P_{n-1}(x)}{1!} + \cdots + \frac{P_{n-k}(x)}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right].$$

Montrer la cohérence de ce résultat avec les expressions de P_n pour $n = 1, 2, 3$. Calculer P_4 et P_5.

4. Une suite de fonctions périodiques

La question 4.1. de cette séquence prépare la construction d'une suite de fonctions périodiques qui est étudiée à la question 4.2. et qui est liée à la suite (P_n).

4.1. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions réelles a, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$a(x) = a(-x) \quad \text{et} \quad a(x) = -a(1-x)$$

pour tout x réel et on note $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions réelles b, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$b(x) = -b(-x) \quad \text{et} \quad b(x) = b(1-x)$$

pour tout x réel.

a. Montrer que toute fonction a de $\mathscr{A}$, ainsi que toute fonction b de $\mathscr{B}$, est 2-périodique.

b. À tout élément a de $\mathscr{A}$, on associe la fonction $I(a)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$I(a)(x) = \int_0^x a(t)\,dt,$$

et à tout élément b de $\mathscr{B}$, on associe la fonction $J(b)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$J(b)(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x b(t)\,dt.$$

Montrer que I est une application de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$ et J une application de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{A}$.

c. On suppose que la restriction à l'intervalle $[0, 1]$ d'une fonction a de $\mathscr{A}$ est strictement croissante. Indiquer les variations de la restriction à ce même intervalle $[0, 1]$ de chacune des fonctions

$$I(a),\ J\circ I(a),\ I\circ J\circ I(a) \qquad \text{et} \qquad J\circ I\circ J\circ I(a).$$

Tournez la page S.V.P.

4.2.*a.* À partir de la fonction u_1, paire et 2-périodique, définie par :

$$u_1(x) = x - \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

on construit la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par les formules :

$$u_{2m}(x) = \int_0^x u_{2m-1}(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad u_{2m+1}(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x u_{2m}(t)\,dt,$$

pour m entier, $m \geqslant 1$ et x réel.

Montrer que pour $n \geqslant 2$, u_n est une fonction 2-périodique ayant une dérivée $(n-1)$-ième continue sur $\mathbb{R}$ et dont la restriction à chaque intervalle $]j, j+1[$ (j élément de $\mathbb{Z}$) est un polynôme de degré n.

Indiquer l'allure de la représentation graphique de u_n selon les valeurs de n ; montrer qu'on a, pour m entier, $m \geqslant 1$, $(-1)^m u_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ et $(-1)^m u_{2m-1}(0) > 0$.

b. On note R_n le polynôme vérifiant $R_n(x) = u_n(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Montrer que, pour m entier, $m \geqslant 1$, $R_{2m}(x) - \frac{x^{2m}}{(2m)!}$ définit un polynôme impair et $R_{2m-1}(x) - \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$ définit un polynôme pair.

Montrer que la suite (R_n) n'est autre que la suite (P_n) introduite à la séquence 3. (Cela établit l'existence de la suite (P_n).)

5. Une suite de fonctions périodiques convergeant vers la fonction cosinus

5.1. À partir de la suite (u_n) décrite à la séquence 4, on définit la suite de fonctions $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par les formules :

$$v_{2m}(x) = \frac{u_{2m}\left(x + \frac{1}{2}\right)}{u_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad v_{2m-1}(x) = \frac{u_{2m-1}(x)}{u_{2m-1}(0)}$$

pour m entier, $m \geqslant 1$ et x réel.

Calculer explicitement $v_2(x)$ et $v_3(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Indiquer l'allure de la représentation graphique de v_n pour $n \geqslant 2$.

5.2. Calculer, pour k entier, $k \geqslant 0$, $\int_{-1}^{1} u_1(x)\cos(k\pi x)\,dx$.

Montrer qu'on a :

$$u_1(x) = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

pour tout x réel.

En déduire un développement en série trigonométrique de u_{2m} et de u_{2m+1} (m entier, $m \geqslant 1$).

Montrer que la suite (v_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \cos \pi x$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail